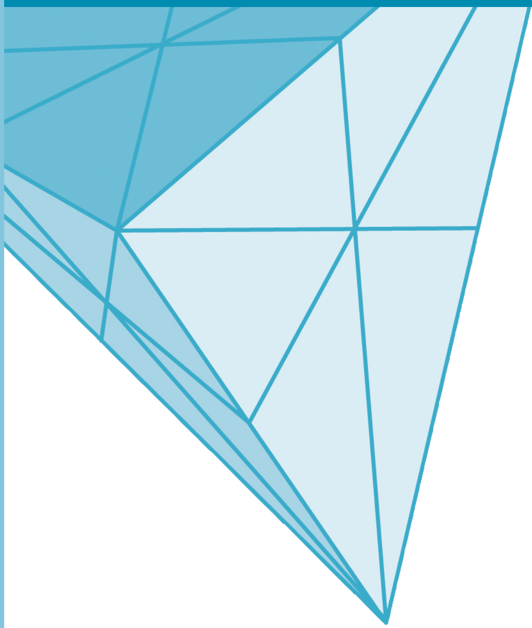
QUADERNO LABORATORIO DI MATEMATICA

a cura di
Ombretta Locatelli
Cristina Turrini

GEOMETRIA SFERICA



BOZZA

matematita

INTRODUZIONE

Il materiale che qui proponiamo è stato pensato per organizzare in classe un laboratorio riguardante la geometria sferica e in particolare i triangoli sferici.
Questo stesso laboratorio è stat sperimentato sia nell'ambito dell'attività che il centro *matematita* porta avanti da diversi anni per affiancare l'insegnamento pre-universitario (http://www.matematita.it/progetti/laboratori.php), sia in alcune classi di liceo scientifico a Milano nell'ambito del progetto "lauree scientifiche", nell'a.s. 2005-2006.
Sulla base del materiale contenuto in questo kit sono possibili diverse scelte, e in questa introduzione vengono date alcune indicazioni, su come organizzare un perocrso laboratoriale completo e su come si possano estrarre alcune proposte più circoscritte.

PERCHÉ LA GEOMETRIA SFERICA?

La geometria sferica costituisce un argomento di notevole importanza e di naturale interesse, anzitutto perché fornisce una buona descrizione del mondo in cui viviamo. Questo però non è l'unico, e forse nemmeno il principale, motivo per cui abbiamo scelto questo come tema di un laboratorio.
La geometria della sfera è un capitolo bello e ricco di geometria: esso richiede assai pochi prerequisiti, eppure può portare lo studente a fare una vera e propria esperienza di matematica. A partire dall'osservazione di semplici fatti sperimentali, lo studente può intuire, congetturare e in alcuni casi anche dimostrare, risultati importanti e inaspettati di geometria non euclidea, quali quelli che riguardano la somma degli angoli interni di un triangolo, o il rapporto tra l'eccesso sferico e l'area dei triangoli, o ancora le mutue proprietà di incidenza di rette sulla sfera.
Nelle schede di lavoro contenute nel CD che accompagna questo fascicolo i concetti di geometria sferica sono quasi sempre introdotti a partire dalle analoghe nozioni di geometria euclidea, e, in ogni caso, sono continui i rimandi dall'uno all'altro contesto: questo da un lato può fornire all'insegnante il pretesto per un ripasso con modalità laboratoriale di alcuni capitoli della geometria euclidea, dall'altro è da stimolo per gli studenti affinché siano essi stessi a proporre le nuove definizioni per analogia con quelle già note.
Le osservazioni fatte sulla sfera possono fornire lo spunto per avviare gli studenti allo studio delle geometrie non euclidee.
Il fatto che questo tema sia in genere poco affrontato nella scuola superiore ci sembra che possa portare dei vantaggi. Ci pare cioè che, al fine di incuriosire i ragazzi sui metodi e sui risultati della matematica, possa essere utile presentare temi in qualche modo svincolati dal programma scolastico. Questo anche perché proprio il fatto che si tratti di un argomento "extra" rispetto al normale curriculum presenta il vantaggio di togliere ai ragazzi la paura relativa alla necessità di prerequisiti e di far loro affrontare i problemi nello spirito del laboratorio: una cooperazione per una ricerca comune.

BOZZA

Si tratta infine di un argomento che si presta molto bene a essere trattato in laboratorio, anche grazie agli ottimi materiali che si hanno a disposizione, quali le Sfere di Lénárt (*Lénárt Sphere*).

I CONTENUTI

Il laboratorio verte sui concetti di punti, "rette" e angoli nella geometria sferica, sulle proprietà dei triangoli sferici e affronta inoltre la questione della posizione reciproca di due rette su una sfera, in particolare la non validità del V postulato di Euclide.
Nelle schede sono previste attività prevalentemente sperimentali e le giustificazioni richieste agli studenti dei vari fenomeni.
Fa eccezione la scheda dal titolo "Rette sulla sfera: alcune dimostrazioni", che è di natura prettamente teorica poiché contiene un'attività di tipo dimostrativo. Tuttavia anche in queso caso può essere di grande aiuto la manipolazione del materiale a disposizione.

I METODI

Tutto il materiale è organizzato in schede di lavoro (di cui si può trovare l'impaginato da stampare e distribuire ai ragazzi nel CD allegato); per ciascuna di queste è predisposta anche una presentazione per gli insegnanti, contenuti in questo fascicolo, comprendente soluzioni e commenti.
Le schede di laboratorio sono state progettate per essere utilizzate dagli studenti suddivisi in piccoli gruppi, in modo da favorire un atteggiamento attivo di "ricerca" rispetto ai problemi proposti, un interscambio delle idee, degli errori, delle scoperte. Ognuna di esse prevede degli spazi bianchi in cui scrivere le risposte ai diversi quesiti ben sappiamo che la rielaborazione e la scrittura di ciò che si è "scoperto" o intuito è una fase di lavoro non semplice che i ragazzi tendono a rifiutare! È peraltro indispensabile non saltarle ma sia come momento di confronto all'interno del gruppo (prima di scrivere una risposta infatti vanno confrontate le diverse soluzioni, in modo da arrivare a una risposta condivisa dai vari membri del gruppo) sia per agevolare il confronto tra le risposte ai quesiti fornite dai diversi gruppi, in una discussione finale collettiva con l'intera classe.
Spesso i problemi richiedono di costruire qualcosa, con fili, materiale adesivo, o con il materiale *ad hoc* fornito in questo kit; in questo caso occorre sempre curare un rapporto equilibrato tra il momento concreto della costruzione e la successiva formalizzazione astratta di quanto si osserva. Da un lato quindi vanno stimolati i ragazzi a non "snobbare" l'aiuto effettivo che può venire all'intuizione dalla manipolazione di oggetti (anche se, in genere, non c'è bisogno di questo stimolo, perché i ragazzi tendono ad accogliere con entusiasmo questa possibilità); dall'altro vanno frenati a non riporre una fiducia cieca in questi supporti: il che significa contribuire ad affinare sia le proprie capacità di immaginazione (cercando quindi sempre di "prevedere" il risultato di una costruzione prima di realizzarla effettivamente), sia le proprie capacità di astrazione che

permettono dall'osservazione di alcuni fenomeni di arrivare a ipotizzare (e magari poi a dimostrare) un risultato valido in generale.

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il kit che presentiamo con questo quaderno comprende:

- 5 Sfere di Lénárt con calotte intercambiabili e lavabili, complete di squadra, compasso e goniometro sferici, e istruzioni per l'uso;
- 6 caleidoscopi (2 blu, 2 rossi e 2 gialli);
- 5 coppie di specchi piani;
- materiale adesivo;
- un poster (50x70) con immagini;
- un CD-rom da cui l'insegnante può estrarre le schede di laboratorio da stampare e distribuire ai ragazzi e le immagini delle sfere necessarie per l'arrività della scheda B.

Nella presentazione per l'insegnante delle diverse schede di laboratorio verrà, di volta in volta specificato, se è necessario altro materiale di uso comune (carta, fili elastici, ...) che è opportuno avere a portata di mano e mettere a disposizione dei ragazzi per il singolo problema discusso.

I POSSIBILI PERCORSI: ORGANIZZAZIONE E TEMPI

Le schede di laboratorio sono quattro e si troveranno di seguito commentate. Esse sono:

A. Rette, semipiani e angoli
B. Caleidoscopi e triangoli sferici
C. Triangoli sferici: alcune proprietà
D. Rette sulla sfera: alcune dimostrazioni.

In particolare segnaliamo che la scheda A contiene le definizioni di punti, "rette" e angoli nella geometria sferica, per cui consigliamo di non prescindere da questa, quandosi propone il laboratorio agli studenti. L'insegnante può scegliere per l'incontro successivo una delle schede rimanenti e organizzare il percorso che preferisce. In particolare, le schede A, B e C costituiscono un percorso completo sul tema dei triangoli sferici, la scheda D è di natura diversa dalle altre poiché contiene attitàdi tipo dimostrativo, come già dichiarato può essere omessa, o rinviata a un lavoro in tempi successivi (ad esempio qualora si voglia introdurre il problema del V postulato).
Le schede A, B, C e D corrispondono a un percorso di 8 ore effettivamente sperimentato nella sua totalità nelle classi terze e quarte di alcuni licei scientifici di Milano, nell'ambito del progetto lauree scientifiche. Parti di questo percorso sono state sperimentate, inoltre in questa forma o in forme lievemente diverse, nei laboratori per le scuole offerti dal centro *matematita* presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università degli Studi di Milano.

Il materiale è stato pensato per un triennio di scuola secondaria superiore. Tuttavia, proprio la mancanza di specifici prerequisiti a cui già si è fatto riferimento fa sì che il materiale sia utilizzabile anche in classi del biennio (e parti di esso sono state effettivamente sperimentate sia al biennio, sia anche, con diversa formulazione, con classi di scuola media): la differenza in questi casi consiste

BOZZA

essenzialmente nel livello di rigore e di consequenzialità che l'insegnante potrà richiedere, nei singoli problemi, come giustificazione delle argomentazioni fatte: è ragionevole pensare che queste si limiteranno a un livello osservativo nella scuola media, per arrivare a livelli via via più consapevoli e razionali con i ragazzi più grandi.

Per finire vi invitiamo a utilizzare il sito www.matematita.it per segnalare osservazioni, commenti e quant'altro. Il forum aperto sul sito stesso potrà essere un utile strumento di confronto tra gli utilizzatori di questo kit.

A. RETTE, SEMIPIANI E ANGOLI

I problemi posti in questa scheda riguardano "rette", "semipiani" e "angoli" sulla superficie sferica. Per arrivare alla definizione di questi enti si ricorre a continui paragoni con gli analoghi enti della geometria euclidea del piano. Questi continui rimandi dal contesto della geometria sferica a quello della geometria piana da un lato forniscono il pretesto per un ripasso di alcuni capitoli della geometria euclidea e dall'altro stimolano gli studenti a proporre autonomamente le nuove definizioni per analogia con quelle già note.
Lo scopo di porre agli studenti i quesiti presenti in questa scheda è quello di introdurre gli oggetti utili per affrontare lo studio di una nuova geometria. Per fare ciò si fa leva sulle preconoscenze degli studenti, per esempio sulle nozioni di latitudine e longitudine; ciò è reso possibile dal fatto che la geometria sferica descrive con buona approssimazione il mondo in cui viviamo. Per lo svolgimento delle attività proposte in questa scheda è necessario fornire ad ogni gruppo un filo elastico lungo circa 10 centimetri.

A1. "RETTE" NEL PIANO E SULLA SFERA

Immaginate di avere un filo elastico e di disporre i suoi estremi su due punti del piano in modo da tenerlo teso. Quale traiettoria descrive il filo?
Data la semplicità della domanda, può essere interessante che gli studenti provino a intuire la soluzione e, solo in un secondo momento, a visualizzarla con il materiale a disposizione, ovvero i fili elastici. Se da un lato il materiale elastico è molto comodo per visualizzare la soluzione del problema, dall'altro comporta una sovrapposizione di concetti: un filo di tale materiale infatti non solo minimizza la lunghezza del percorso tra due punti, ma minimizza anche l'energia del sistema. Per evitare quindi confusione si potrebbero utilizzare fili non elastici, ma l'effetto non sarebbe lo stesso.

Tra le infinite possibili traiettorie che congiungono i due punti, la linea retta ha una proprietà che è messa in evidenza da questo fenomeno. Quale?
Anche in questo caso la domanda non presenta particolari difficoltà e invita gli studenti a riflettere sulla proprietà che hanno le rette nel piano di minimizzare la lunghezza del percorso tra due punti. A volte gli studenti fraintendono il senso dell'affermazione "infinite possibili traiettorie che congiungono i due punti" ritenendo che le traiettorie possibili siano infinite poiché sono infiniti i modi in cui si possono scegliere due punti nel piano.

Ora dal piano passiamo ad un'altra superficie, la superficie sferica.

Sapete che cosa sono meridiani e paralleli sulla superficie terrestre? E che cosa vogliono dire i termini latitudine e longitudine? Scrivetelo qui sotto.
Il quesito fornisce lo spunto per collegarsi a ciò che gli studenti conoscono già per esperienza personale o perché affrontato in classe.
Se non ricordano la definizione, e comunque per

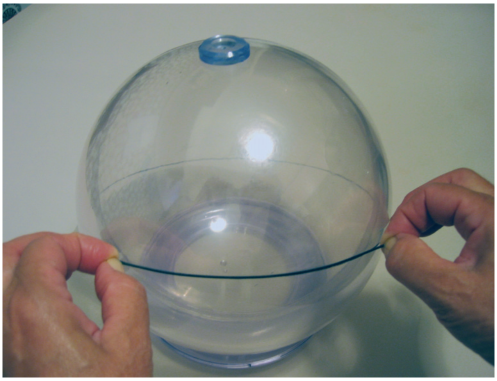
conferma della correttezza delle risposte che forniscono, si può dire loro di cercarla per il successivo incontro. Non è il caso in questa sede di insistere per ottenere la definizione formale: questa può semplicemente costituire un punto di riferimento, per gestire la discussione e chiarire gli eventuali dubbi dei ragazzi.

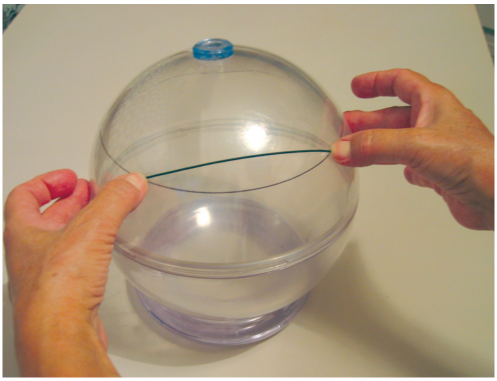
Disegnate un punto sulla sfera da interpretarsi come Polo Nord e, utilizzando il compasso e la squadra sferica tracciate l'equatore, due meridiani e un parallelo diverso dall'equatore.

Questa affermazione chiama in causa le sfere presenti nel *kit*. È fondamentale che gli studenti acquisiscano dimestichezza con il materiale loro fornito e che lo utilizzino per rispondere o per controllare le risposte ai quesiti. Se ricordano il significato dei termini latitudine e longitudine si può far disegnare loro un punto sulla sfera, e chiedere di misurare con gli strumenti a disposizione latitudine e longitudine di quel punto (una volta assunto il meridiano che hanno già dovuto disegnare sulla sfera come meridiano di Greenwich). Se non lo ricordano si può proporre questa attività nell'incontro successivo.

Tenendo il filo teso per le estremità e ponendo queste su un meridiano, come si dispone il filo? Segue una traiettoria particolare?
E ponendo le estremità sull'equatore?
Cosa succede se i due estremi sono su un parallelo diverso dall'equatore?

Anche in questo caso sarebbe interessante che gli studenti facessero delle congetture prima di verificare con il materiale la propria risposta. Anche perché in genere gli studenti forniscono la stessa risposta a tutti e tre i quesiti, rimanendo quindi stupiti quando osservano che nell'ultimo caso il filo non si dispone lungo un parallelo diverso dall'equatore, ma su di un arco di circonferenza con centro nel centro della sfera. Le figure seguenti mostrano le soluzioni nel caso in cui gli estremi del filo vengano scelti su di un meridiano (o sull'equatore) e su di un parallelo.





Tra le infinite traiettorie che congiungono due punti della sfera uno dei due possibili archi di cerchio massimo ha una proprietà che è stata messa in evidenza dagli esperimenti che avete fatto con i fili: quale?

Analogamente alle proprietà già viste per le rette nel piano, l'arco di cerchio massimo minimizza la lunghezza del percorso tra due punti. Questo è il motivo per cui, ad esempio, le rotte degli aerei seguono circonferenze massime (le cosiddette "rotte polari"): in tal modo il percorso risulta il più breve possibile.

A2. SEMIPIANI, SEMISFERE E LORO INTERSEZIONI

Nel piano una retta individua due semipiani. Cosa individua sulla sfera una circonferenza massima?

Una circonferenza massima divide la sfera in due semisfere.

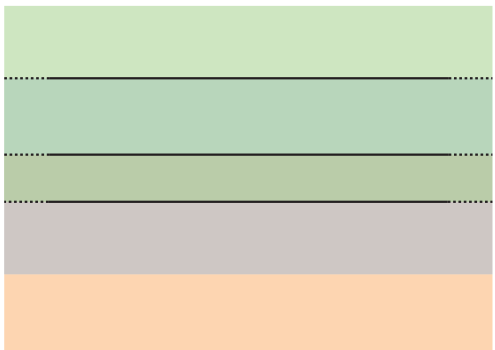
Sapreste utilizzare la nozione di semipiano per definire il concetto di angolo convesso nel piano? Illustrate con un disegno quanto detto.

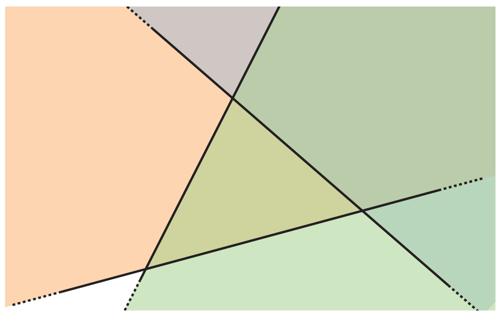
Gli studenti potrebbero avere qualche difficoltà a rispondere a questo quesito. In genere infatti essi sono abituati a definire un angolo (convesso) tramite semirette e non come intersezione di due semipiani con rette generatrici non parallele.

Si potrebbe poi chiedere l'analogo per angoli concavi (unione di semipiani).

Quali sottoinsiemi del piano potete ottenere, invece, intersecando tre semipiani?

Ci sono varie possibilità: il vuoto, un punto, un triangolo, una "striscia", ecc. La risposta dipende anche da che cosa intendano per semipiano (cioè se con o senza il bordo), conveniamo qui di considerare come semipiano la parte di piano delimitata da una retta comprendendo la retta stessa. Ci aspettiamo che i ragazzi realizzino qualche figura come le seguenti:





Come modifichereste la definizione di angolo nel caso di una sfera?

Che forma ha allora un angolo su una sfera?

Come si può ottenere allora un "triangolo" su una sfera (triangolo sferico)?

Si arriva a questo punto a dare una definizione di triangolo sferico come intersezione di tre semisfere (si veda la figura seguente), chiedendo agli studenti di riflettere sul fatto che si può definire un angolo (convesso) su una sfera come intersezione di due semisfere, e che questo risulta avere la forma di uno spicchio.